TITLE:

Fourier解析におけるMartingales(マルチンゲールとその周辺)

AUTHOR(S):

渡利, 千波

CITATION:

渡利, 千波. Fourier解析におけるMartingales(マルチンゲールとその周辺). 数理解析研究所講究録 1983, 491: 1-13

ISSUE DATE:

1983-05

URL:

http://hdl.handle.net/2433/103539

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
491巻 1983年 1-13

Fourier 解析における Martingales

山形大 工　渡利千波
(Chinami Watari)

§1. 序. Martingales の理論の歴史は, Fourier 解析の歴史にくらべてはるかに浅く, Fourier解析をモデルとしながら発展して来た一面をもっている。他方, 出発点においては完全に Fourier解析に所属する結果と見られているものが, 実は Martingale 論に所属すると見る方が落ち着きのよいことがある. ここでは, この種の結果の例として, 古典的な2つの定理

I. Paley による Walsh-Fourier 級数の分解定理

II. L^1-関数の Calderon-Zygmund 分解

について述べる。この両者の関係は, いわゆる「Fourier解析における実関数的方法」が整備される過程で明らかになって来たが, Martingale 理論の立場から「明示的に」論じている文献はあまり見当らないようである。あるいは, すでに空気のような存在になってしまっているのであろうか。筆者にはまだそうなっているとは思われないが。

§2. Paley の分解定理. R. E. A. C. Paley は, J. E. Littlewood と共同で, いわゆる Littlewood-Paley 理論を建設するかたわら, Walsh 関数系に関する Fourier 級数論

（以下WFSの理論という）の L^p-theory $(p>1)$ を作った。これを紹介するには、技術的になるが、Walsh関数の定義から始めねばならない。

Rademacher関数系 $\{\phi_n(x)\}$ $n=0,1,2,\cdots$

$$\phi_0(x)=\begin{cases}1 & 0\leqq x \quad 1/2\\ -1 & 1/2\leqq x<1\end{cases}\qquad \phi_0(x+1)=\phi_0(x)$$

$$\phi_n(x)=\phi_0(2^n x)\qquad [0,1)\text{ 上の}$$

で定義される関数系をいう。これは、正規直交系であるが完備ではない。この直交性が、確率論にいう独立性に起因していることは注目に値する。

Paleyの定義によるWalsh関数系 $\{\psi_n(x)\}_{n=0,1,2\cdots}$ は次のようなものである。

$\psi_0(x)\equiv 1$

$n\geqq 1$ に対しては、その2進法展開を考えて

$$n=2^{n_1}+2^{n_2}+\cdots+2^{n_r}\qquad n_1>n_2>\cdots>n_r\geqq 0$$

とするとき

$$\psi_n(x)=\phi_{n_1}(x)\,\phi_{n_2}(x)\cdots\phi_{n_r}(x).$$

$\{\psi_n(x)\}$ が ± 1 という値のみをとる正規直交系であることは容易に見られる。$f\in L^1(0,1)$ を

$$c_n=\int_0^1 f(t)\,\psi_n(t)\,dt\qquad f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_n\psi_n(x)$$

と Fourier展開すると，その部分和 $s_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu \psi_\nu(x)$ は

$$s_n(x)=\int_0^1 f(t)\,D_n(x,t)\,dt \qquad D_n(x,t)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\psi_\nu(x)\psi_\nu(t)$$

で与えられる。とくに $n=2^m$ に対しては

$$D_{2^m}(x,t)=\prod_{j=0}^{m-1}\left(1+\phi_j(x)\phi_j(t)\right)=\begin{cases}2^m & [0,2^{-m})\\ 0 & [2^{-m},1)\end{cases}$$

が成立するから，$s_{2^m}(x)\to f(x)$ a.e. であり，$\{\psi_n\}$ は完備な正規直交系である。

f から S_{2^m} を作る操作は，条件つき期待値を作ることに他ならず，$\{S_{2^m}\}$ は Martingale をなしている。今日の目で見れば，Martingale論との関連が出発点においてすでに認められることになる。

さて，Paley の分解定理は次のように述べられる。

定理1. ある $p>1$ に対して $f\in L^p(0,1)$ とする。

$S_{2^{m+1}}(x)-S_{2^m}(x)=\delta_m(x)$ とおくとき

$$\Delta(x)=\left(|c_0|^2+\sum_{m=1}^{\infty}|\delta_m(x)|^2\right)^{1/2}$$

$$\Delta^*(x)=c_0\phi_0(\theta)+\sum_{m=1}^{\infty}\phi_m(\theta)\,\delta_m(x)$$

は，いずれも $f(x)$ と「ほぼ大きさが等しい」，つまり

(1) $$\int_0^1 \Delta(x)^p\,dx \leqq A_p\int_0^1|f(x)|^p\,dx \leqq A_p\int_0^1 \Delta(x)^p\,dx$$

(2) $$\int_0^1 |\Delta^*(x)|^p\,dx \leqq A_p\int_0^1|f(x)|^p\,dx \leqq A_p\int_0^1 |\Delta^*(x)|^p\,dx$$

ここで A_p は p だけで定まり f に無関係な定数をあらわすが，場所によって異なることがある。

この定理を証明するに当って，Paley は $p=2k$ の場合に $\Delta(x)^{2k}$ の積分を直接計算して (1) の左半分を出し，Khintchine の不等式で (2) に移り，M. Riesz の補間定理を用いて一般の $p \geqq 2$ の場合の左半分を出し，双対性で (2) の右半を出し，Khintchine の不等式で (1) の右半を出す，という手順をとっている。ここでは，Marcinkiewicz の補間定理を利用する。

第1段　$p=2$ のとき。　Fourier 解析の立場では Bessel の不等式ないし Parseval の等式であり，Martingale の立場では Martingale difference の函数の直交性による。

第2段　$p=1$ のとき。　この場合には，定理の結論自体は成立しないが，その代用品ともいえる「弱い評価」が得られる。この評価のために，II の Calderon-Zygmund 分解が有効であるが，後述することにして，結果は

(3)　$\operatorname{meas}\{x : \Delta(x) > y\} \leqq \dfrac{3}{y}\|f\|_1$　　(Δ^* も同様)

となる。

第3段（Marcinkiewicz の補間定理の特殊な形）

T が，可積分関数を可測関数にうつす作用素で，

$$|T(f+g)(x)| \leqq |Tf(x)| + |Tg(x)|$$

$$|T(cf)(x)| = |c|\,|Tf(x)|$$

$$\|Tf\|_2 \leqq A\|f\|_2 \qquad \text{meas}\{x : |(Tf)(x)| > y\} \leqq \frac{A}{y}\|f\|_1$$

をみたしていれば, $1 < p \leqq 2$ に対して定数 A_p が定まり

$$\|Tf\|_p \leqq A_p \|f\|_p.$$

とくに, (1), (2) の左半分は, $1 < p \leqq 2$ に対して成立する.

第4段 (Khintchine の不等式) $0 < p < \infty$ に対し

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty}|c_m|^2\right)^{p/2} \leqq A_p \int_0^1 \left|\sum_{m=0}^{\infty} c_m \phi_m(\theta)\right|^p d\theta \leqq A_p\left(\sum_{m=0}^{\infty}|c_m|^2\right)^{p/2}$$

通常は p を偶数として中央項を展開して証明されるが, 第2段を仮定すれば, 次のような証明も可能である. 収束性に関する煩雑さを避けるため, 有限和と考えて論ずる.

$$f(\theta) = \sum_{m=0}^{N} c_m \phi_m(\theta) \qquad \text{とすると} \qquad \Delta(\theta) = \left(\sum_{m=0}^{N}|c_m|^2\right)^{1/2} = \|f\|_2$$

である。これは定数(正と考えてよい)だから $y < \|f\|_2$ に対して (たとえば $y = \frac{3}{4}\|f\|_2$ とせよ)

$$1 = \text{meas}\{\theta : \Delta(\theta) > y\} \leqq 4\|f\|_1 / \|f\|_2$$

つまり $\|f\|_2 \leqq 4\|f\|_1$ である。 $p < 2$ を2に近くとって, $\alpha = \frac{2}{p} - 1$, $\beta = 2 - \frac{2}{p}$ とおくと $\alpha > 0$, $\beta > 0$ $\alpha + \beta = 1$ で ($\beta p' = \beta \cdot \frac{p}{p-1} = 2$ に注意)

$$\int_0^1 |f(\theta)|\,d\theta \leqq \left(\int_0^1 |f(\theta)|^{\alpha p} d\theta\right)^{1/p} \left(\int_0^1 |f(\theta)|^{\beta p'} d\theta\right)^{1/p'}$$

から $\left(\sum_{m=0}^{N}|c_m|^2\right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p'}} \leqq 4\left(\int_0^1 |f(\theta)|^{2-p} d\theta\right)^{1/p}$ がえる.

これが左半分である。右半分は Walsh 多項式が L^p で稠密なことを用いて、duality で得られる。

第5段　Paley の定理の (1), (2) は同値である。

$\delta_m(x)$ を $\phi_m(\theta)$ の係数と見て、Khintchine の不等式による。

第6段　(2) の左半は、$1<p<\infty$ に対して成立する。

第3段と、duality による。

第7段　(2) の右半が $1<p<\infty$ に対して成立する。

有限和の場合を考えれば十分である。$\Delta^*(x)$ に、もう一度 f から Δ^* を作った操作を施すと $f(x)$ に戻るから左半に帰着する。

これで、第2段を仮定してはいるが、Paley の定理の証明が一段落した。

§3. Calderon-Zygmund 分解

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とし、$\mathfrak{F}$ は atomic σ-field の増加列 $\{\mathfrak{F}_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ によって張られているとする。$\{\mathfrak{F}_n\}$ は、次のような意味で "regular" であると仮定する。$(\mathfrak{F}_0=\{\Omega,\phi\})$

$$\exists C>0:\ A\in\mathfrak{F}_n,\ B\in\mathfrak{F}_{n-1}\ \text{atoms}\ A\subset B$$
$$\Rightarrow P(B)\leq C\,P(A)$$

典型的な例としては、$\Omega=[0,1)$, $\mathfrak{F}$ は Borel sets 全体、$\mathfrak{F}_n$ は Ω を逐次2分して得られる分割から生成される

σ-field が考えられる。 Ωとして $\mathbb{R}^d$ の単位直方体をとり、2等分割である。 $C = 2^d$ とすればよい。

定理2 (Calderon - Zygmund 分解)

$f \in L^1$ と $y > \|f\|_1$ を与えるとき、f は次のように分解できる。

(i) $f = g + b \qquad b = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n(i)} b_{ij}$

(ii) b_{ij} は $\mathcal{F}_i$-atom A_{ij} の外では 0 で、

$$y \sum_{i,j} P(A_{ij}) \leqq \|f\|_1$$

(iii) $\sum_{i,j} \|b_{ij}\|_1 \leqq 2\|f\|_1$

(iv) $E(b_{ij}) = \int_{A_{ij}} b_{ij} \, dP = 0$

(v) $\|g\|_1 \leqq \|f\|_1$

(vi) $\|g\|_\infty \leqq C y$. (C は "regularity constant")

証明 Calderon - Zygmund の原証明は、次のように読み直すことができる。

$h_n = E[\,|f| \mid \mathcal{F}_n]$ とおいて、Martingale $\{h_n\}$ を作る。 $\tau = \inf\{n : h_n > y\}$ とおくと τ は1つの stopping time である(すなわち、$(\tau = n)$ という事象は $\mathcal{F}_n$ 可測であるという事実が、すべての n に対して成立する)。

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap (\tau = n) \in \mathcal{F}_n \quad \forall n\}$$

は $\mathcal{F}$ の sub-σ-field をなしている。とくに $(\tau = n)$

という事象は（もちろん $\mathcal{F}_n$ 可測であるが）$\mathcal{F}_\tau$ 可測でもある。

補題　$A \in \mathcal{F}_\tau \cup \mathcal{F}_n$ ならば $A \cap (\tau = n) \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_n$

実際，示すべきことは2つあって

a)　$A \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow A \cap (\tau = n) \in \mathcal{F}_n$　（$\mathcal{F}_\tau$ の定義の一部）

b)　$A \in \mathcal{F}_n \Rightarrow A \cap (\tau = n) \in \mathcal{F}_n$

b) の結論は $\{A \cap (\tau = n)\} \cap (\tau = k) \in \mathcal{F}_k$　$(\forall k)$ に他ならないが，$n = k$ であればこれは自明で，$n \neq k$ であれば空集合 $\phi \in \mathcal{F}_k$ からやはり成立する。

系1. 集合族 $\mathcal{G}$ と集合 B において次の記法を用いる。

$$\mathcal{G} \cap B = \{ A \cap B : A \in \mathcal{G} \}$$

このとき　$\mathcal{F}_\tau \cap (\tau = n) = \mathcal{F}_n \cap (\tau = n)$

系2.　$E[f \mid \mathcal{F}_\tau]\, 1_{(\tau = n)} = E[f \mid \mathcal{F}_n]\, 1_{(\tau = n)}$

実際，条件つき期待値の性質から，左辺は

$$E[f\, 1_{(\tau = n)} \mid \mathcal{F}_\tau] = E[f\, 1_{(\tau = n)} \mid \mathcal{F}_\tau \cap (\tau = n)]$$

に等しいから，これに系1を適用すればよい。

定理2の証明に戻る。　$g = E[f \mid \mathcal{F}_\tau]\, 1_{(\tau < \infty)} + f\, 1_{(\tau = \infty)}$ とおき，$b = f - g = \{f - E[f \mid \mathcal{F}_\tau]\}\, 1_{(\tau < \infty)}$ とおく。

$$(\tau < \infty) = \bigcup_{i=0}^{\infty} (\tau = i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{n(i)} A_{ij}$$

（$(\tau = 0) = \phi$　$(y > \|f\|_1$　だから）に注意，A_{ij} は $\mathcal{F}_i$-atom）

と分解して　$b_{ij} = b\, 1_{A_{ij}}$　とおくと (i) は成立している。

(ii) は $\quad y\,P(\tau=n) \leqq \int_{(\tau=n)} h_n\,dP = \int_{(\tau=n)} |f|\,dP$ を n について加え合わせて $\quad y\,P(\tau<\infty) \leqq \|f\|_1$ から得られる。

(iii) は $\quad \sum_{i,j} |b_{ij}| \leqq |f| + E[\,|f|\,|\,\mathcal{F}_\tau]$ からわかる.

(iv) : 補題の系2から

$$E[\,h\,|\,\mathcal{F}_\tau]\,1_{(\tau=i)} = E[\,h\,|\,\mathcal{F}_i]\,1_{(\tau=i)}$$ が成立し,

$$E[\,b_{ij}\,|\,\mathcal{F}_i] = E[\,f\,|\,\mathcal{F}_i]\,1_{A_{ij}} - E[\,E[\,f\,|\,\mathcal{F}_\tau]\,1_{A_{ij}}\,|\,\mathcal{F}_i]$$
$$= 0$$ であるから

$$E[\,b_{ij}] = E[\,E[\,b_{ij}\,|\,\mathcal{F}_i]] = 0$$

(v) は g の作り方から直接に得られる.

(vi) を示すために $\{\mathcal{F}_n\}$ の "regularity" が必要になっている。

$(\tau=\infty)$ 上では $|f| \leqq \lambda$ であるから, $(\tau<\infty)$ 上で考えればよい. $(\tau=i)$ 上では

$$g = g\,1_{(\tau=i)} = E[\,f\,|\,\mathcal{F}_\tau]\,1_{(\tau=i)} = E[\,f\,|\,\mathcal{F}_i]\,1_{(\tau=i)}$$

であり, $\mathcal{F}_i$ - atom $A_{ij} = A$ の上では (B : $\mathcal{F}_{i-1}$ atom, $\supset A$)

$$|g| \leqq \frac{1}{P(A)}\int_A |f|\,dP \leqq \frac{1}{P(A)}\int_B |f|\,dP \leqq \frac{C}{P(B)}\int_B |f|\,dP$$

$$= C\,h_{i-1} \leqq C\,\lambda$$

これで証明が完了する。

定理1 の第2段に戻る。 $\Omega=[0,1)$ とし, $\mathcal{F}_n$ は Ω を逐次に2等分して得られる sub σ-field とする。 $\mathcal{F}=\bigvee_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$ は Borel sets 全体である. $f \in L^1$, $y > \|f\|_1$ を与えるとき $\{h_n\}$, τ を定理2の証明のように定める.

$f = g + b$ に対応して，g, b から Δ, Δ^* に相当するものが作れるが，それらを Δ_g, Δ_g^* ; Δ_b, Δ_b^* と書くことにする。Minkowski の不等式あるいは直接評価で

$$\Delta \leqq \Delta_g + \Delta_b \qquad |\Delta^*| \leqq |\Delta_g^*| + |\Delta_b^*|$$

が得られる。Δ, $|\Delta^*|$ については殆ど同様の評価が成立するから，以下 Δ について論ずる。

$$\{x;\ \Delta(x;f) > y\} \equiv (\Delta > y) \subset (\Delta_g + \Delta_b > y)$$
$$= \Big((\Delta_g + \Delta_b > y) \cap (\tau < \infty) \Big) \cup \Big((\Delta_g + \Delta_b > y) \cap (\tau = \infty) \Big)$$
$$\subset (\tau < \infty) \cup (\Delta_g > y)$$

が成立する。ここで

(*) $(\tau = \infty)$ 上では $\Delta_b = 0$

を一時仮定している。Chebyshev の不等式と，第1段と，(vi) (v) をこの順で利用して，$y > \|f\|_1$ のときは

$$\mathrm{meas}(\Delta_g > y) \leqq \frac{1}{y^2}\int_0^1 \Delta_g^2\, dx \leqq \frac{1}{y^2}\int_0^1 |g|^2 dx$$
$$\leqq \frac{2}{y}\int_0^1 |g|\, dx \leqq \frac{2}{y}\|f\|_1$$

が得られるから，$\mathrm{meas}(\tau < \infty) \leqq \frac{1}{y}\|f\|_1$ とあわせて

$$\mathrm{meas}(\{x;\ \Delta(x;f) > y\}) \leqq \frac{3}{y}\|f\|_1 \qquad (y > \|f\|_1)$$

が得られる。$y \leqq \|f\|_1$ に対しては，左辺は 1 以下，右辺は 3 以上となり trivial に成立する。

残っているのは (*) の験証である。

Δ_b は，$E[b|\mathcal{F}_n]$ の階差の平方和の平方根だから，$(\tau=\infty)$ 上で $E[b|\mathcal{F}_n]$ がすべて0であることを見ればよい。そのためには

$$b=(f-E[f|\mathcal{F}_\tau])1_{(\tau<\infty)}=\sum_{i=1}^{\infty}(f-E[f|\mathcal{F}_\tau])1_{(\tau=i)}$$

の右端辺の各項（$b^{(i)}$ とおく）について，$E[b^{(i)}|\mathcal{F}_n]1_{(\tau=\infty)}$ が0であればよい。さて，$i\leqq n$ であれば

$$E[b^{(i)}|\mathcal{F}_n]1_{(\tau=\infty)}$$
$$=E[f1_{(\tau=i)}|\mathcal{F}_n]1_{(\tau=\infty)}-E[E[f|\mathcal{F}_\tau]1_{(\tau=i)}|\mathcal{F}_n]1_{(\tau=\infty)}$$

右辺第2項は補題2を用いて $E[E[f|\mathcal{F}_i]1_{(\tau=i)}|\mathcal{F}_n]1_{(\tau=\infty)}$ と書けるから，第1項，第2項とも $1_{(\tau=i)}\cdot1_{(\tau=\infty)}$ という因数をもつことになり，$0-0=0$ である。$i>n$ であれば，第1項はそのままで，第2項は $\mathcal{F}_n\subset\mathcal{F}_i$ から第1項と等しくなるから，やはり0である。これで(*)が示された。

定理1の証明もこれで完　している。

§4. 他の若干の場合について。Carlesonによる，L^2 関数のFourier級数の概収束の証明の途中にも，条件つき期待値が利用されている。この点に着目して，乗法的な直交関数系に対して，Martingale論を利用して収束問題を解決しようとしたSchippの研究があり，ある程度の成功はおさめているものの，2つの対象の大きさを比較する，という操作が

本質的に必要な段階があって，なかなかMartingale論の枠内には封じ込められない。劣調和性を利用することなしに，R^dにおけるH^pの理論を構成しようとする一連の試みの中にも，ある種のMartingaleが効果的に利用されている。現状ではまだ相当に不備であるが，Fourier解析のかなりの部分が，Martingale論の立場から見通しよく再編される可能性は，かなり大きいと思われる。

文献．Calderon-Zygmund分解は[1]で与えられた。Paley[2]の後半部にはあまり証明がなく，「Fourier級数の場合と同様である」という記述が見られるが，いわゆるLittlewood-Paley理論として発展されたものは，複素関数論を利用する関係上，WFSに適用できない部分がかなりある。ただ，"real method"が整備されて，証明はされている。

△のL^1-評価を与えたのはYano[7]である。本稿での証明はほぼ[5]に従っているが，"regular" Martingaleを全面においた点では[6]というべきかもしれない。この条件は強すぎる嫌いがあるが，本質的に必要であることがUchiyama[3]で指摘されている。[4]はすぐれた綜合報告である。F. Schippの研究はAnalysis Math.の初期の巻に出ている。Marcinkiewiczの補間定理の完全な形は[Z]．

References

[1] A. P. Calderon - A. Zygmund, On existence of certain singular integrals, Acta Mathematica 88(1952), 85 - 139.

[2] R. E. A. C. Paley, A remakable system of orthogonal functions, Proc. London Math. Soc. (II), 34(1932), 241 - 279.

[3] A. Uchiyama, Weight functions on probability spaces, Tôhoku Math. J., 30(1978), 463 - 470.

[4] 内山明人, BMO について, 数学 34(1982), 317 - 330.

[5] C. Watari, Mean convergence of Walsh-Fourier series, Tôhoku Math. J., 16(1964), 183 - 188.

[6] 渡利千波, Martingales の Calderon-Zygmund 分解とその応用. 実解析セミナー 1976

[7] S. Yano, On a lemma of Marcinkiewicz and its applications to Fourier series, Tôhoku Math. J. 11(1959), 191 - 215.

[Z] A. Zygmund, Trigonometric series, vol. II, pp. 112 et seq.